

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název vzdělávacího materiálu:	Aritmetická posloupnost
Číslo vzdělávacího materiálu:	VY_32_INOVACE_M1.2.04
Autor vzdělávacího materiálu:	PaedDr. Hana Kůstová
Období, ve kterém byl vzdělávací materiál vytvořen:	1. pololetí školního roku 2013/2014
Vzdělávací oblast:	Matematika a její aplikace
Vzdělávací obor:	Matematika a její aplikace
Vzdělávací předmět:	Matematika
Tematická oblast:	Posloupnosti
Ročník, pro který je vzdělávací materiál určen:	4. ročník, vyšší stupeň gymnázia

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Anotace:	Prezentace slouží k výkladu a definici aritmetické posloupnosti. Jsou zde uvedeny různé typy a zadání aritmetických posloupností. Prezentaci lze použít při procvičování tohoto tématu a při úvodu do finanční matematiky.
Citace použitých zdrojů:	Vlastní zdroje. Učebnice: Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc. Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady, Praha: nakladatelství Prometheus, spol. s r.o., dotisk 2. vydání, 2005. ISBN 80-7196-195-7

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost – definice:

Posloupnost se nazývá aritmetická, právě když existuje takové reálné číslo d takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Číslo d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti.

Aritmetická posloupnost – věty:

Věta 1:

V aritmetické posloupnosti s diferencí d platí pro každé přirozené číslo n :

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$$

Věta 2:

V aritmetické posloupnosti s diferencí d platí pro všechna přirozená čísla r, s :

$$\mathbf{a_s = a_r + (s - r) \cdot d}$$

Aritmetická posloupnost – věty:

Věta 3:

Každý člen aritmetické posloupnosti (mimo prvního) je aritmetickým průměrem svého bezprostředně předcházejícího a bezprostředně následujícího členu.

Příklad: Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, v níž je dán první člen =5, diference d=3.

Řešení:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 3 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$

$$a_5 = a_4 + d = 14 + 3 = 17$$

Prvních pět členů dané aritmetické posloupnosti: 5, 8, 11, 14, 17.

Příklad

V aritmetické posloupnosti je dáno:

$$a_3 = 5, a_5 = 9, \text{ vypočítejte } \underline{a_1}, \underline{d}$$

Nápověda: dosadíme do vzorce pro n-tý člen a řešíme soustavu dvou lineárních rovnic:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1).d}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$5 = a_1 + 2d$$

$$9 = a_1 + 4d$$

$$\underline{\underline{a_1 = 1, d = 2}}$$

Příklad:

V aritmetické posloupnosti jsou dány její členy $a_3 = 5$, $a_8 = 15$.
určete diferenci d a členy posloupnosti a_1 , a_{17}

Nápověda: dosadíme do vzorce pro n -tý člen a řešíme soustavu dvou lineárních rovnic:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Řešení:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_8 = a_1 + 7d$$

$$5 = a_1 + 2d$$

$$15 = a_1 + 7d$$

V dané posloupnosti je $d = 2$, $a_1 = 1$, $a_{17} = 33$

Příklad:

Aritmetická posloupnost je určena svým prvním členem $a_1 = -4$ a
diferencí $d = 0,5$. **Vypočítejte a_5 , a_{10}**

Nápověda: dosadíme do vzorce pro n-tý člen

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Řešení:

$$a_5 = -4 + 4 \cdot 0,5$$

$$a_5 = -2$$

$$a_{10} = -4 + 9 \cdot 0,5$$

$$a_{10} = 0,5$$

Výsledek: $a_5 = -2$, $a_{10} = 0,5$

Příklad:

Rozhodněte, které z čísel 16, 41, je členem aritmetické posloupnosti
určené údaji: $a_1 = 1$, $d = 1,5$

Nápověda: použijeme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Číslo 16 je členem dané aritmetické posloupnosti, pokud existuje
přirozené číslo n, pro které platí:

$$16 = 1 + (n - 1) \cdot 1,5$$

Řešením této rovnice je **n = 11**. **Číslo 11 je přirozené a proto číslo**
16 je jedenáctým členem dané aritmetické posloupnosti.

Stejně postupujeme při zjišťování, zda je číslo 41 členem dané
aritmetické posloupnosti.

$$41 = 1 + (n - 1) \cdot 1,5$$

$n = 27,6666\dots$ toto číslo není přirozené, tedy **číslo 41 není**
členem dané aritmetické posloupnosti.

Cvičení:

Napište prvních šest členů aritmetické posloupnosti a určete, jde-li o posloupnost rostoucí nebo klesající:

a) $a_1 = 1$ $d = 2$

b) $a_1 = 2$ $d = 0,5$

c) $a_1 = -5,6$ $d = 1,4$

d) $a_1 = 0$ $d = -0,2$

Řešení - cvičení:

(Napište prvních šest členů aritmetické posloupnosti a určete, jde-li o posloupnost rostoucí nebo klesající)

a) $a_1 = 1$ $d = 2$

Členy: 1, 3, 5, 7, 9, 11. rostoucí

b) $a_1 = 2$ $d = 0,5$

Členy: 2. 2,5. 3. 3,5. 4. 4,5. rostoucí

c) $a_1 = -5,6$ $d = 1,4$

Členy: -5,6. -4,2. -2,8. -1,4. 0. rostoucí

d) $a_1 = 0$ $d = -0,2$

Členy: 0. -0,2. -0,4. -0,6. -0,8. -1. klesající

Vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot n (a_1 + a_n)$$

- Příklad: “Vypočítejte součet prvních sto přirozených čísel!”

.....To měl pravit při hodině matematiky pan učitel, který měl ve třídě malého Gause, budoucího slavného matematika.

Žák Gauss vzápětí prohlásil: „5050!”

- **Řešení:**

$$S_{100} = \frac{1}{2} \cdot 100(1 + 100) = 5050$$