INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název vzdělávacího materiálu:	Nekonečná geometrická řada
Číslo vzdělávacího materiálu:	VY_32_INOVACE_M1.2.10
Autor vzdělávací materiálu:	PaedDr. Hana Kůstová
Období, ve kterém byl vzdělávací materiál vytvořen:	1. pololetí školního roku 2013/2014
Vzdělávací oblast:	Matematika a její aplikace
Vzdělávací obor:	Matematika a její aplikace
Vzdělávací předmět:	Matematika
Tematická oblast:	Posloupnosti
Ročník, pro který je vzdělávací materiál určen:	4. ročník, vyšší stupeň gymnázia
Anotace:	Pracovní list je možné používat současně k výkladu i k procvičování daného tématu.
Citace použitých zdrojů:	Vlastní zdroje
Vzdělávací materiál vytvořen v rámci projektu **Sportovní gymnázium - škola 21. století**	

Nekonečná geometrická řada

Nekonečnou řadou se nazývá symbol

$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots.,$

který se zapisuje též ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Čteme „suma a_n od n rovno jedné do nekonečna“.

Platí, že pokud je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že daná nekonečná řada je konvergentní, a příslušnou limitu nazýváme součet nekonečné řady. Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že daná nekonečná řada je divergentní.

Je-li nekonečná řada konvergentní a je-li její limita rovna s, zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme tedy nejen nekonečnou řadu, ale též její součet (pokud existuje).

Je-li posloupnost geometrická a její kvocient je q, nazýváme nekonečnou řadu – **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q.

Věta:
Nekonečná geometrická řada, pro kterou $a_1 \neq 0$, je **konvergentní, právě když pro její kvocient q platí** /q/ < 1. V tomto případě je její součet $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Úloha:

Dokažte, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$ je konvergentní. Určete pak její součet.

Řešení:

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$, čili řada

$10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots,$

je nekonečná geometrická řada s kvocientem $q = 10^{-1}$.

Tato nekonečná řada je konvergentní (/q/ < 1) a její součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{0{,}1}{0{,}9} = \frac{1}{9}$$

Poznámka:

Pro součet s zadané nekonečné geometrické řady platí:
s = 0,1 + 0,01 + 0,001 + …. = 0,111… = 1/9

Úloha:

Napište ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem číslo $0.3\overline{25}$ (3 je předperioda, skupina číslic 25 je perioda).

Řešení:

Dané číslo můžeme zapsat takto:

$3.10^{-1} + 25.10^{-3} + 25.\ 10^{-5} + 25.10^{-7} + \ldots + 25.10^{-2n-1} + \ldots$

Uvažujeme nejprve nekonečnou řadu

$25.10^{-3} + 25.10^{-5} + \ldots + 25.10^{-2n-1} + \ldots.$

Čili řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 25.10^{-2n-1}$.

Jde o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = 10^{-2}$. Tato řada je konvergentní (/q/< 1) a její součet je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{25.10^{-3}}{1-10^{-2}} = \frac{0,025}{0,99} = \frac{25}{990}$$

číslo $0.3\overline{25}$ pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$3.10^{-1} + 25/990 = \frac{0,3.990+25}{990} = \frac{322}{990}$

Výsledek:

$0.3\overline{25}$ **=** $\frac{322}{990}$